ETH Zürich HS 2019
RW, D-MATL, D-MAVT
Dr. Christoph Czichowsky

Koordinator
Florian Krach

Stochastik
Musterlösung 2

1. Wir werfen eine (faire) Münze 2 mal und betrachten folgende Ereignisse:

- A_1 : "der erste Wurf ist Kopf",
- A_2 : "der zweite Wurf ist Kopf",
- A_3 : "beide Würfe sind gleiche ".

a) Berechne $P[A_i]$, $i = 1, 2, 3$.

b) Sind A_1 und A_2 unabhängig? Sind A_1 und A_3 unabhängig? Sind A_2 und A_3 unabhängig?

c) Sind A_1 und A_2^c unabhängig? Sind A_1 und A_3^c unabhängig? Beweise oder widerlege die folgende Aussage: Wenn A und B unabhängig sind, dann sind auch A und B^c unabhängig.
Tipp: Begründe und verwende $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

d) Sind A_1, A_2 und A_3 unabhängig? Sind sie paarweise unabhängig? Was können wir daraus schließen?

Lösung:

a) Da die Münze faire ist gilt $P[A_1] = P[A_2] = \frac{1}{2}$. Insgesamt gibt es die vier möglichen Ergebnisse von zwei Würfen (diese bilden unseren Grundraum) $\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, Z), (Z, K)\}$, die alle gleich wahrscheinlich sind. Nach dem Laplace-Modell gilt somit $P[A_3] = \frac{1}{2}$.

b) Es ist zu prüfen, ob jeweils $P[A_i \cap A_j] = P[A_i]P[A_j]$ für $i = 1, 2, 3$ und $j = 1, 2, 3$ mit $i \neq j$ gilt.

Wir bemerken zuerst, dass

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = (K, K)$$

und weiters $P[(K, K)] = \frac{1}{4}$ gilt. Wie in **a)** berechnet, erhalten wir ebenso

$$P[A_i]P[A_j] = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Wir sagen, A_1, A_2 und A_3 sind *paarweise* unabhängig.

c) A_1 und A_2^c sind unabhängig beziehungsweise A_1 und A_3^c sind unabhängig. Dies folgt durch sehr ähnliche Berechnung wie in **b)** (beziehungsweise aus **b)** und dem folgenden Beweis).

Die Aussage ist wahr und kann wie folgt bewiesen werden. Die Unabhängigkeit von A und B bedeutet $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Wir verwenden, dass A als disjunkte Vereinigung $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ geschrieben werden kann, woraus folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B^c) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c).\end{aligned}$$

d) Bemerke, dass $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (K, K)$, und somit $P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \frac{1}{4}$. Wegen

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P[A_1]P[A_2]P[A_3]$$

sind somit A_1, A_2 und A_3 *nicht* unabhängig.

Diese Aufgabe zeigt auf, dass Unabhängigkeit nicht aus paarweiser Unabhängigkeit folgt.

2. **a)** Der Einsturz eines Gebäudes in Tokio kann durch zwei voneinander unabhängige Ereignisse verursacht werden:

- E_1: ein grosses Erdbeben
- E_2: ein starker Taifun

Die jährlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse sind $P(E_1) = 0.04$ und $P(E_2) = 0.08$.

i) Berechnen Sie die jährliche Einsturzwahrscheinlichkeit des Gebäudes.

ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gebäude innerhalb der nächsten 5 Jahre einstürzt? Ist es realistisch dieses Problem als binomialverteilt anzunehmen? Begründe.

Zur Erinnerung: Die Binomialverteilung mit Paramatern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$ ist die Anzahl "Erfolge" in n unabhängigen Wiederholungen eines "Experiments" mit "Erfolgswahrscheinlichkeit" p.

b) Der technische Dienst erklärt einem ETH-Professor, dass die Chance im Lift steckenzubleiben nur $\frac{1}{10000}$ sei. Der Professor geht 45 Wochen im Jahr, 5 Tage pro Woche zur Arbeit und benützt dabei den Lift täglich zweimal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er innerhalb seines 10-jährigen Arrangements an der ETH niemals, einmal, zweimal im Lift stecken bleibt? Welche vernünftige Annahme wird man machen um die Rechnung durchführen zu können?

Lösung:

Siehe nächstes Blatt!

a) i) Die jährliche Einsturzwahrscheinlichkeit $E_1 \cup E_2$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= 0.04 + 0.08 - 0.04 \cdot 0.08 = 0.1168, \end{aligned}$$

wobei $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$, weil E_1, E_2 unabhängig sind.

ii) Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, dass das Haus 5 Jahre lang nicht einstürzt, ist $P[A] = (1 - P[E_1 \cup E_2])^5 \approx 0.5374$. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Haus einstürzt $P[A^c] = 1 - P[A] \approx 0.4626$. Man kann dieses Problem nicht als binomialverteilt annehmen, da das Haus nur einmal einstürzen kann. Insbesondere sind die X_i nicht unabhängig. Konzeptuell ist das das gleiche, wie eine Münze 5 mal zu werfen, wobei man nach dem ersten mal “Kopf” stoppt und nur weiterwirft, wenn “Zahl” kommt. Ein geeigneter Grundraum um dieses Problem zu modellieren ist $\Omega = \{-1, 0, 1\}^5$, wobei 1 an Stelle i bedeutet, dass das Haus im Jahr i einstürzt, 0, dass es nicht einstürzt und -1, dass es bereits eingestürzt ist.

b) Der Professor wird in den 10 Jahren den Lift $10 \cdot 45 \cdot 5 \cdot 2 = 4500$ mal benutzen. Wir gehen davon aus dass er in jedem dieser 4500 Male unabhängig voneinander entweder steckenbleibt oder nicht. [1] Die Zufallsvariable X welche die Male zählt bei denen der Professor im Lift stecken bleibt ist also binomialverteilt mit Parameter $n = 4500$ und $p = \frac{1}{10000}$. Somit ergeben sich foldende Wahrscheinlichkeiten.

Prof bleibt nie stecken:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \left(1 - \frac{1}{10\,000}\right)^{4500} = 0.6376.$$

Prof bleibt einmal stecken:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{4500}{1} \cdot \left(\frac{1}{10\,000}\right)^{1} \cdot \left(1 - \frac{1}{10\,000}\right)^{4499} = 0.2870.$$

Prof bleibt zweimal stecken:

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{4500}{2} \cdot \left(\frac{1}{10\,000}\right)^{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{10\,000}\right)^{4498} = 0.0646.$$

3. Eine Versicherungsgesellschaft teilt ihre Kunden anhand der Schadeneintrittswahrscheinlichkeiten in drei Kategorien ein, wobei ein Kunde zu genau einer

[1] Formal bedeutet das, dass die Ereignisse A_i..."Prof bleibt bei der i-ten Fahrt stecken" $(i = 1, \ldots, 4500)$ unabhängig sind.

Kategorie gehört. In der folgenden Tabelle sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für jede Kategorie gegeben (beispielsweise verursachen gute Risiken mit Wahrscheinlichkeit 1% einen Schaden).

Kategorie	Wahrscheinlichkeit
Gute Risiken	1%
Mittlere Risiken	5%
Teure Risiken	10%

Der Anteil der guten Risiken betrage 40%, 50% seien mittlere Risiken und 10% teure Risiken.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Kunde einen Schaden verursacht?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Kunde, der einen Schaden verursacht hat, ein gutes Risiko?

c) Welcher Anteil der Kunden verursacht einen Schaden und gehört nicht zur teuren Kategorie?

Lösung:

Es sei $S = \{\text{Schaden tritt ein}\}$ und G, M, T seien die Ereignisse, dass der Kunde zu den guten, mittleren, beziehungsweise teuren Risiken gehört.

a) Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned} P[S] &= P[S|G]P[G] + P[S|M]P[M] + P[S|T]P[T] \\ &= \frac{1}{100} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{100} \cdot \frac{5}{10} + \frac{10}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{39}{1000}. \end{aligned}$$

b) Mit dem Satz von Bayes folgt

$$P[G|S] = \frac{P[S|G]P[G]}{P[S]} = \frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{39}{1000}} = \frac{4}{39}.$$

c) Gesucht ist $P[T^c \cap S]$. Mit $T^c = G \cup M$ folgt

$$\begin{aligned} P[T^c \cap S] &= P[(G \cup M) \cap S] = P[G \cap S] + P[M \cap S] \\ &= P[S|G]P[G] + P[S|M]P[M] \\ &= \frac{1}{100} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{100} \cdot \frac{5}{10} \\ &= \frac{29}{1000}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

4. (**Dies ist eine leicht modifizierte Prüfungsaufgabe aus dem Sommer 2013**)
Patrick hat ein gutes Gespür dafür, wo es Öl im Boden hat. Er überprüft im Auftrag einer Ingenieurfirma diverse Standorte. Aus Erfahrung weiss man, dass bei den vorliegenden Standorten jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/3 wirklich Öl vorhanden ist. Dieses Ereignis bezeichnen wir mit W ("Wirklich"), d.h. es gilt $P(W) = 1/3$. Das Ereignis, dass Patrick an einem Standort Öl vermutet, bezeichnen wir mit G ("Gespür").

Falls an einem Standort tatsächlich Öl vorliegt, erkennt dies Patrick mit Wahrscheinlichkeit 0.75 (d.h. $P(G \mid W) = 0.75$). Entsprechend sagt Patrick mit Wahrscheinlichkeit 0.9, dass kein Öl vorliegt, falls in Tat und Wahrheit wirklich kein Öl da ist (d.h. $P(G^c \mid W^c) = 0.9$).

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(G \mid W^c)$ und $P(G)$.

b) Patrick vermutet, dass an einem Standort Öl vorhanden ist (Ereignis G). Wie gross ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich Öl vorhanden ist?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Patrick die Lage an einem Standort falsch einschätzt? (Das heisst: er vermutet, dass kein Öl vorhanden ist und tatsächlich welches da ist, oder er vermutet, dass Öl vorhanden ist und keines da ist.)

d) Sie schicken Patrick zu Testzwecken an 10 Standorte, bei denen Sie wissen, dass tatsächlich Öl vorhanden ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Patrick mindestens einmal angibt, dass kein Öl vorhanden ist? Die Entscheidungen an den verschiedenen Standorten können als unabhängig voneinander angenommen werden.

Lösung:

a) Gemäss den Rechenregeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten folgt

$$P(G|W^c) = 1 - P(G^c|W^c) = 1 - 0.9 = 0.1.$$

Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit erhält man

$$P(G) = P(G \cap W) + P(G \cap W^c).$$

Einsetzen der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten liefert

$$\begin{aligned} P(G \cap W) + P(G \cap W^c) &= P(G|W)P(W) + P(G|W^c)P(W^c) \\ &= 0.75 \cdot \frac{1}{3} + 0.1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{60} = 0.3167, \end{aligned}$$

Bitte wenden!

wobei $P(W^c) = 1 - P(W) = \frac{2}{3}$.

b) Mithilfe der Formel von Bayes erhält man

$$P(W|G) = P(G|W) \cdot \frac{P(W)}{P(G)} = 0.75 \cdot \frac{1/3}{19/60} = \frac{15}{19} = 0.7895.$$

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass Patrick vermutet, dass kein Öl vorhanden ist und tatsächlich welches da ist, ist gegeben durch $P(W \cap G^c)$. Analog ist die Wahrscheinlichkeit, dass Patrick vermutet, dass Öl vorhanden ist und tatsächlich aber keines da ist, gegeben durch $P(W^c \cap G)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Patrick die Lage falsch einschätzt, ist also gegeben durch

$$P(W \cap G^c) + P(W^c \cap G) = P(G^c|W) \cdot P(W) + P(G|W^c) \cdot P(W^c) = 0.25 \cdot \frac{1}{3} + 0.1 \cdot \frac{2}{3} = 0.15.$$

d) Sei A das Ereignis, dass Patrick mindestens einmal angibt, dass kein Öl vorhanden ist. Das Komplementärereignis (A^c) dazu ist dann, dass Patrick nie angibt, dass kein Öl vorhanden ist (also dass er in allen 10 Fällen angibt, dass Öl vorhanden ist). Da die Entscheidungen an allen Standorten als unabhängig voneinander angenommen werden, ist die Wahrscheinlichkeit, dass Patrick an allen 10 Standorten angibt, dass Öl vorhanden ist gegeben durch

$$P(A^c) = 0.75^{10} = 0.056.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Patrick mindestens einmal angibt, dass kein Öl vorhanden ist, beträgt also

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.75^{10} = 0.944.$$